



Wymagania egzaminacyjne na egzamin wstępny z matematyki na rok akademicki 2024/2025 w Politechnice Łódzkiej Examination requirements for the mathematics entrance exam for the academic year 2024/2025 at the Lodz University of Technology

Poziom rozszerzony / Advanced level

1. Liczby rzeczywiste / 1.	
<ol style="list-style-type: none">1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych;3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $ax < ay$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $ax > ay$;6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $x + 4 = 5$, $x - 2 < 3$, $x + 3 > 4$;8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat;9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami	1)

<p>na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi;</p> <p>10) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu;</p> <p>11) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.</p>	
2. Wyrażenia algebraiczne / 2.	
<p>1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$;</p> <p>2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;</p> <p>3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;</p> <p>4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu</p> $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$ <p>5) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;</p> <p>6) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.</p> <p>7) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;</p> <p>8) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;</p> <p>9) korzysta ze wzorów na: $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 + b^3$ i $a^3 - b^3$.</p>	<p>1)</p>
3. Równania i nierówności / 3.	
<p>1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;</p> <p>2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;</p> <p>3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;</p> <p>4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;</p> <p>5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;</p> <p>6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej;</p>	<p>1)</p>

<p>7) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;</p> <p>8) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż: $\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$</p> <p>9) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;</p> <p>10) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 x + 3 + 3 x - 1 = 13, x + 2 + 2 x - 3 < 11;$</p> <p>11) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.</p>	
4. Układy równań / 4.	
<p>1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;</p> <p>2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;</p> <p>3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, w postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$</p> <p>4) rozwiązuje układy równań kwadratowych w postaci $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}$</p>	1)
5. Funkcje / 5.	
<p>1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);</p> <p>2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;</p>	1)

<ol style="list-style-type: none"> 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie; 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane; 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach; 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem; 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym; 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym; 12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$; 13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi; 14) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = f(x)$. 	
---	--

6. Ciągi / 6.

<ol style="list-style-type: none"> 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 2) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; 3) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; 4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu 	<ol style="list-style-type: none"> 1)
---	--

<p>geometrycznego;</p> <p>6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym;</p> <p>7) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych;</p> <p>8) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.</p>	
7. Trygonometria / 7.	
<p>1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;</p> <p>2) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$</p> <p>3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$</p> <p>4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty m.in. z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów);</p> <p>5) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;</p> <p>6) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;</p> <p>7) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;</p> <p>8) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;</p> <p>9) korzysta ze wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;</p> <p>10) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$;</p> <p>11) stosuje twierdzenie sinusów;</p> <p>12) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (m.in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów).</p>	<p>1)</p>
8. Planimetria / 8.	
<p>1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;</p> <p>2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie</p>	<p>1)</p>

<p>naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności; 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezów; 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; 6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu; 7) stosuje twierdzenia: Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą; 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; 9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych; 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności; 11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur; 12) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; 13) stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa; 14) przeprowadza dowody geometryczne. 	
9. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej / 9.	
<ol style="list-style-type: none"> 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje; 2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu); 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; 4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; 5) oblicza odległość punktu od prostej; 6) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych); 7) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym 	<ol style="list-style-type: none"> 1)

<p>wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);</p> <p>8) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość;</p> <p>9) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.</p>	
10. Stereometria / 10.	
<p>1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;</p> <p>2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną;</p> <p>3) rozpoznaje w graniastostupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów;</p> <p>4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastostupów i ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;</p> <p>5) wykorzystuje zależność między objętościami graniastostupów oraz ostrosłupów podobnych;</p> <p>6) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;</p> <p>7) posługuje się pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;</p> <p>8) rozpoznaje w graniastostupach i ostrosłupach kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;</p> <p>9) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;</p> <p>10) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.</p>	<p>1)</p>
11. Kombinatoryka / 11.	
<p>1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;</p> <p>2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:</p> <p style="margin-left: 20px;">a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,</p> <p style="margin-left: 20px;">b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.</p>	<p>1)</p>

<p>3) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;</p> <p>4) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.</p>	
12. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka / 12.	
<p>1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;</p> <p>2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;</p> <p>3) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;</p> <p>4) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;</p> <p>5) stosuje schemat Bernoulliego.</p>	<p>1)</p>
13. Optymalizacja i rachunek różniczkowy / 13.	
<p>1) Zdający rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową;</p> <p>2) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);</p> <p>3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej;</p> <p>4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu;</p> <p>5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;</p> <p>6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.</p>	<p>1)</p>